Тема №8 «Математическая статистика. Обработка данных»

Лекция 3 Интегральные преобразования

1. Дискретное преобразование Фурье

2. Вейвлет- преобразование

Как в целях подавления шума, так и для решения других проблем обработки данных, широко применяются различные интегральные преобразования. В основе метода лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (образами), получаемыми из данных по определенным правилам, причем действия над оригиналами заменяются более простыми действиями над образами. Примерами интегральных преобразований являются преобразование Фурье, Лапласа, вейвлетное преобразование. Напомним, что некоторые преобразования, например Фурье и Лапласа, можно осуществить в режиме символьных вычислений. Каждое из интегральных преобразований эффективно для решения своего круга задач анализа данных.

Mathcad содержит функции для быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ) и его обращения. Все эти функции имеют векторные аргументы.

Математический смысл преобразования Фурье состоит в представлении сигнала $y(x)$ в виде бесконечной суммы синусоид вида $F(v)=sin(vx)$. Функция $F(v)$ называется преобразованием Фурье или интегралом Фурье, или Фурье-спектром сигнала. Ее аргумент v имеет смысл частоты соответствующей составляющей сигнала. Обратное преобразование Фурье переводит спектр $F(V)$ в исходный сигнал $y(x)$.

Как видно, преобразование Фурье является существенно комплексной величиной, даже если сигнал действительный.

Этот алгоритм реализован в нескольких встроенных функциях Mathcad, различающихся нормировками.

- ***fft(y)*** – вектор прямого преобразования Фурье;
- ***FFT(Y)*** – вектор прямого преобразования Фурье в другой нормировке;
- ***ifft(v)*** – вектор обратного преобразования Фурье;
- ***IFFT(V)*** – вектор обратного преобразования Фурье в другой нормировке;
  - *y* – вектор действительных данных, взятых через равные промежутки значений аргумента;
  - *v* – вектор действительных данных Фурье-спектра, взятых через равные промежутки значений частоты.

Аргумент прямого Фурье-преобразования, т. е. вектор *y*, должен иметь ровно 2^n элементов (*n* – целое число). Результатом является вектор с $1+2^{n-1}$ элементами. И наоборот, аргумент обратного Фурье-преобразования должен иметь $1+2^{n-1}$ элементов, а его результатом будет вектор из

2^n элементов. Если число данных не совпадает со степенью 2, то необходимо дополнить недостающие элементы нулями.

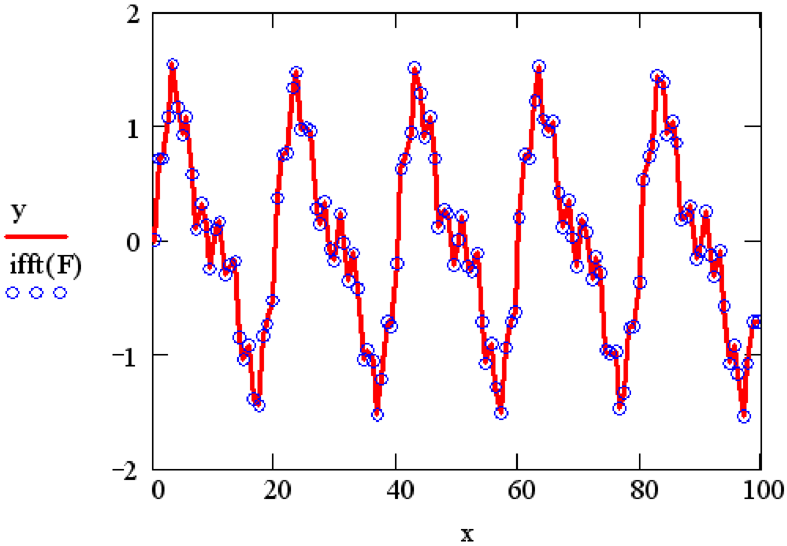

Рис. 1. Исходные данные и обратное преобразование Фурье (листинг 1)

Пример расчета Фурье-спектра для суммы трех синусоидальных сигналов разной амплитуды (показанных в виде сплошной кривой на рис. 1), приведен в листинге 1. Расчет проводится по *N=128* точкам, причем предполагается, что интервал дискретизации данных равен Δ. В предпоследней строке листинга применяется встроенная функция **fft**, а в последней корректно определяются соответствующие значения частот Ω_i. Обратите внимание, что результаты расчета представляются в виде модуля Фурье-спектра (рис. 2), поскольку сам спектр является комплексным. Очень полезно сравнить полученные амплитуды и местоположение пиков спектра с определением синусоид в листинге 1.

Листинг 1. Быстрое преобразование Фурье:

$$N := 128$$

$$xMAX := 100$$

$$\Delta := \frac{xMAX}{N}$$

$$i := 0..N-1$$

$$x_i := i\cdot\Delta$$

$$y_i := \sin(2\cdot\pi\cdot 0.05\cdot x_i) + 0.5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 0.1\cdot x_i) + 0.25\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 0.4\cdot x_i)$$

$$F := fft(y)$$

$$\Omega_i := (i+1)\cdot\frac{1}{xMAX}$$

Результат обратного,преобразования Фурье показан в виде кружков на том же рис. 1, что и исходные данные. Видно, что в рассматриваемом случае сигнал *y(x)* восстановлен с большой точностью, что характерно для плавного изменения сигнала.

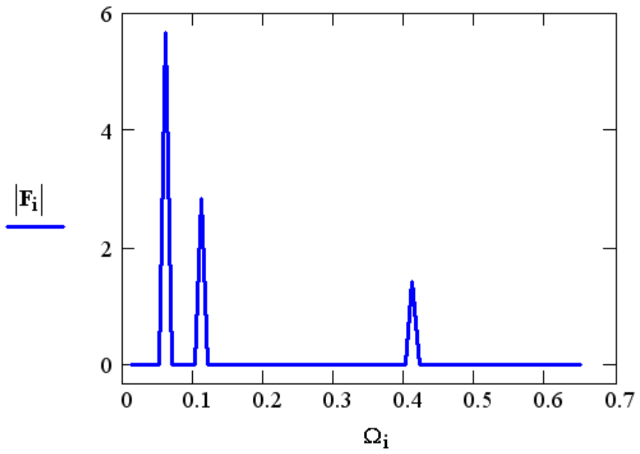

Рис. 2. Преобразование Фурье. Спектр сигнала (листинг 1)

Преобразование Фурье комплексных данных

Алгоритм быстрого преобразования Фурье для комплексных данных встроен в соответствующие функции, в имя которых входит литера "**c**".

- **cfft(y)** – вектор прямого комплексного преобразования Фурье;
- **CFFT(y)** – вектор прямого комплексного преобразования Фурье в другой нормировке;
- **icfft(y)** – вектор обратного комплексного преобразования Фурье;
- **ICFFT(V)** – вектор обратного комплексного преобразования Фурье в другой нормировке;
  - *y* – вектор данных, взятых через равные промежутки значений аргумента;
  - *v* – вектор данных Фурье-спектра, взятых через равные промежутки значений частоты.

Функции действительного преобразования Фурье используют тот факт, что в случае действительных данных спектр получается симметричным относительно нуля, и выводят только его половину. Поэтому, в частности, по 128 действительным данным получалось всего 65 точек спектра Фурье. Если к тем же данным применить функцию комплексного преобразования Фурье (рис. 3), то получится вектор из 128 элементов. Сравнивая рис. 1 и 3, можно уяснить соответствие между результатами действительного и комплексного Фурье-преобразования.

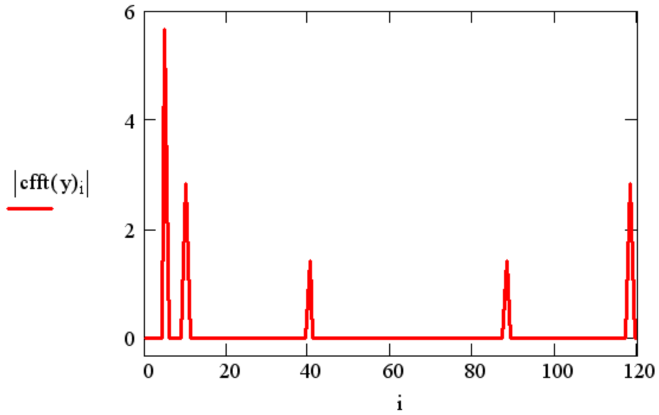

Рис. 3. Комплексное преобразование Фурье (продолжение листинга 1)

Двумерное преобразование Фурье

В Mathcad имеется возможность применять встроенные функции комплексного преобразования Фурье не только к одномерным, но и к двумерным массивам, т. е. матрицам. Соответствующий пример приведен в листинге 2 и на рис. 4 в виде графика линий уровня исходных данных и рассчитанного Фурье-спектра.

Листинг 2. Двумерное преобразование Фурье:

$$N := 64$$

$$i := 0 .. N-1 \qquad j := 0 .. N-1$$

$$y_{i,j} := \sin\left(\frac{i+j}{10}\right) + \sin\left(\frac{i-j}{10}\right)$$

$$F := \mathrm{CFFT}(y)$$

$$F := \mathrm{submatrix}(F, 7, N-7, 7, N-7)$$

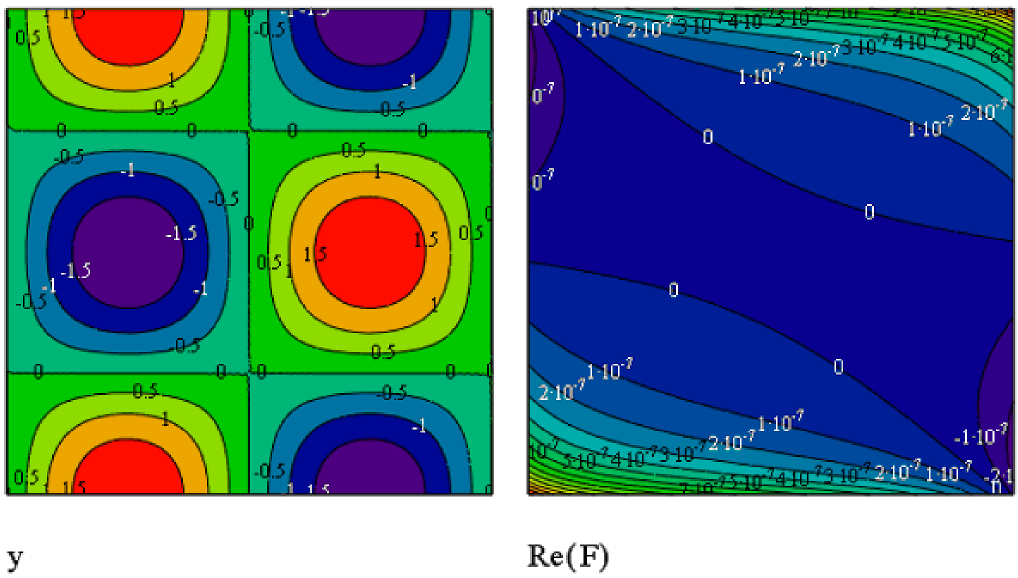

Рис. 4 Данные (слева) и их Фурье-спектр (справа) (листинг 2)

2 Вейвлетное преобразование

В последнее время возрос интерес к другим интегральным преобразованиям, в частности вейвлетному (или дискретному волновому) преобразованию. Оно применяется, главным образом, для анализа нестационарных сигналов (случайный сигнал, у которого плотность вероятности некоторой совокупности мгновенных значений изменяется при некотором сдвиге этой совокупности во времени) и многих задач подобного рода оказывается более эффективным, чем преобразование Фурье. вейвлетного преобразования является разложение данных не по синусоидам (как для преобразования Фурье), а по другим функциям, называемым вейвлетобразующими.

Вейвлет-преобразование — интегральное преобразование, которое представляет собой свертку вейвлет-функции с сигналом. Вейвлет-преобразование переводит сигнал из временного представления в частотно-временное. Является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого – классическое преобразование Фурье.

Базисными функциями вейвлет-преобразований могут быть самые различные функции с компактным носителем: модулированные импульсами синусоиды, функции со скачками уровня и т. п. Они обеспечивает хорошее отображение и анализ сигналов с локальными особенностями, в том числе со скачками, разрывами и перепадами значений с большой крутизной, при подборе соответствующего типа вейвлетов.

Вейвлетобразующие функции, в противоположность бесконечно осциллирующим синусоидам, локализованы в некоторой ограниченной области своего аргумента, а вдали от нее равны нулю или ничтожно малы. Пример такой функции, называемой "мексиканской шляпой", показан на рис. 5.

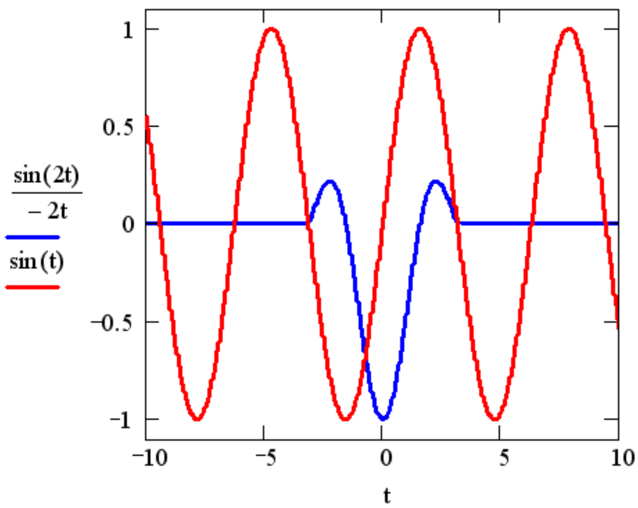

Рис. 5. Сравнение синусоиды и вейвлетобразующей функции

Из-за своего математического смысла вейвлет-спектр имеет не один аргумент, а два. Помимо частоты, вторым аргументом b является место локализации вейвлетобразующей функции. Поэтому b имеет ту же размерность, что и x.

Встроенная функция вейвлет-преобразования

Mathcad имеет одну встроенную функцию для расчета вейвлет-преобразования на основе вейвлетобразующей функции Даубечи.

- **wave (y)** – вектор прямого вейвлет-преобразования;
- **iwave(v)** – вектор обратного вейвлет-преобразования;
  - *y* – вектор данных, взятых через равные промежутки значений аргумента;
  - *v* – вектор данных вейвлет-спектра.

Аргумент функции вейвлет-преобразования, т. е. вектор y, должен так же, как и в преобразовании Фурье, иметь ровно 2n элементов (n – целое число). Результатом функции **wave** является вектор, скомпонованный из нескольких коэффициентов с двухпараметрического вейвлет-спектра. Использование функции **wave** объясняется на примере анализа суммы двух синусоид в листинге 3, а три семейства коэффициентов вычисленного вейвлет-спектра показаны на рис. 6.

Листинг 3. Поиск вейвлет-спектра Даубечи:

$$f(t) := \sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{50}\right) + 0.3\cdot\sin\left(2\cdot\pi\cdot\frac{t}{10}\right)$$

$$Nmax := 256 \qquad i := 0..Nmax-1$$

$$y_i := f(i)$$

$$W := wave(y)$$

$$Nlevels := \frac{\ln(Nmax)}{\ln(2)} - 1$$

$$Nlevels = 7$$

$$k := 1, 2..Nlevels$$

$$coeffs(level) := submatrix\left(W, 2^{level}, 2^{level+1}-1, 0, 0\right)$$

$$c_{i,k} := coeffs(k)_{floor\left[\frac{i}{\left(\frac{Nmax}{2^k}\right)}\right]}$$

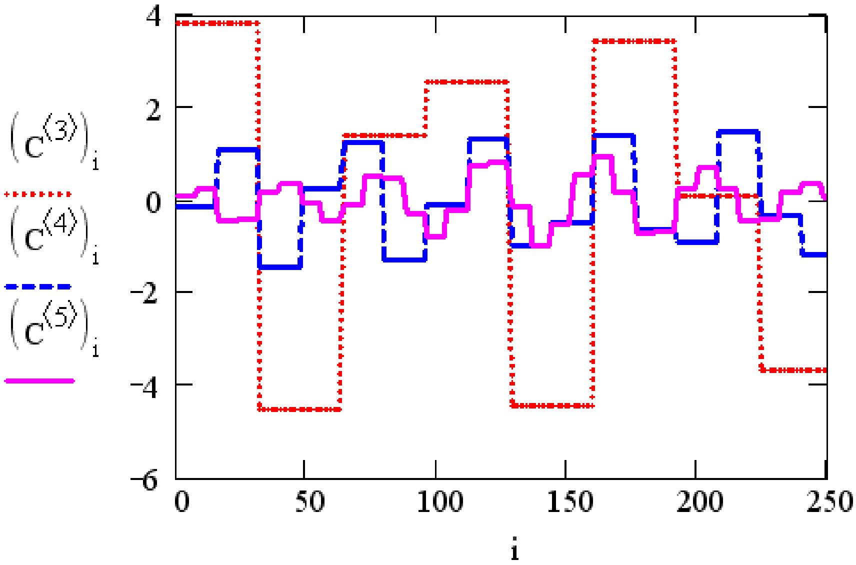

Рис. 6. Вейвлет-спектр на основе функции Даубечи (листинг 3)

Итак, в лекции рассмотрены основы применения интегральных преобразований таких как быстрое и обратное преобразование Фурье (БПФ и ОПФ), вейвлет-преобразование, которые нашли широкое применение при решении задач оптимальной фильтрации, построение эффективных алгоритмов сжатия информации.