Тема №5 Интегрирование и дифференцирование

Лекция 1 Интегрирование

Интегрирование в Mathcad реализовано в виде вычислительного оператора. Допускается вычислять интегралы от скалярных функций в пределах интегрирования, которые также должны быть скалярами. Несмотря на то что пределы интегрирования обязаны быть действительными, подынтегральная функция может иметь и комплексные значения, поэтому и значение интеграла может быть комплексным. Если пределы интегрирования имеют размерность (см. разд. "Размерные переменные" гл 4), то она должна быть одной и той же для обоих пределов.

Операторы интегрирования

Интегрирование, дифференцирование, как и множество других математических действий, устроено в Mathcad по принципу "как пишется, так и вводится". Чтобы вычислить определенный интеграл, следует напечатать его обычную математическую форму в документе. Делается это с помощью панели **Calculus** (Вычисления) нажатием кнопки со значком интеграла или вводом с клавиатуры сочетания клавиш **SHIFT + 7** (или символа "&"). Появится символ интеграла с несколькими местозаполнителями (рис. 1), в которые нужно ввести нижний и верхний интервалы интегрирования, подынтегральную функцию и переменную интегрирования.

Можно вычислять интегралы с одним или обоими бесконечными пределами. Для этого на месте соответствующего предела введите символ бесконечности, воспользовавшись, например, той же самой панелью **Calculus** (Вычисления). Чтобы ввести минус бесконечность, добавьте знак минус к символу бесконечности, как к обычному числу.

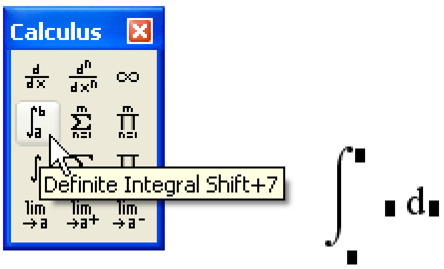

Рис. 1. Оператор интегрирования

Чтобы получить результат интегрирования, следует ввести знак равенства или символьного равенства. В первом случае интегрирование будет проведено численным методом, во втором – в случае успеха, будет найдено точное значение интеграла с помощью символьного процессора Mathcad. Эти два способа иллюстрирует листинг 5.1. Конечно, символьное интегрирование возможно только для небольшого круга несложных подынтегральных функций.

Листинг 5.1. Численное и символьное вычисление определенного интеграла:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx \to 2$$

Подынтегральная функция может зависеть от любого количества переменных. Именно для того чтобы указать, по какой переменной Mathcad следует вычислять интеграл, и нужно вводить ее имя в соответствующий местозаполнитель. Помните, что для численного интегрирования по одной из переменных предварительно следует задать значение остальных переменных, от которых зависит подынтегральная функция и для которых вы намерены вычислить интеграл (листинг 5.2).

Листинг 5.2. Интегрирование функции двух переменных по разным переменным:

$$\alpha := 2$$

$$\int_0^{\pi} \alpha\cdot\sin(x)\,dx = 4$$

$$x := 1$$

$$\int_0^{10} \alpha\cdot\sin(x)\,d\alpha = 42.074$$

Оператор интегрирования может использоваться точно так же, как и другие операторы: для определения функций, в циклах и при вычислении ранжированных переменных. Пример присваивания пользовательской функции д(x) значения определенного интеграла и вычисления нескольких ее значений приведен в листинге 5.3.

Листинг 5.3. Использование оператора интегрирования в функции пользователя:

$$g(\alpha) := \int_0^{\pi} \alpha \cdot \sin(x)\, dx$$

$$i := 1..5$$

$$g(i) =$$

2
4
6
8
10

Об алгоритмах интегрирования

Результат численного интегрирования – это не точное, а приближенное значение интеграла, определенное с погрешностью, которая зависит от встроенной константы **TOL**. Чем она меньше, тем с лучшей точностью будет найден интеграл, но и тем больше времени будет затрачено на расчеты. По умолчанию TOL=0.001. Для того чтобы ускорить вычисления, можно установить меньшее значение TOL.

Если скорость расчетов имеет для Вас принципиальное значение, например при многократном вычислении интеграла внутри цикла, проявите осторожность, выбирая значение точности Обязательно поэкспериментируйте на тестовом примере с характерной для Ваших расчетов подынтегральной функцией. Посмотрите, как уменьшение константы TOL сказывается на погрешности интегрирования, вычислив интеграл для разных ее значений и выбрав оптимальное, исходя из соотношения точность / скорость вычислений.

Отдавайте себе отчет в том, что при вводе в редакторе Mathcad оператора численного интегрирования, Вы, фактически, создаете самую настоящую программу. Например, программой является первая строка листинга 7.1, просто большая часть ее скрыта от Вашего взора разработчиками компании MathSoft. В большинстве случаев об этом не приходится специально задумываться, можно полностью положиться на Mathcad. Но иногда может потребоваться умение управлять параметрами этой программы, как мы уже рассмотрели на примере выбора константы TOL. Кроме нее, пользователь имеет возможность выбирать сам алгоритм численного интегрирования. Для этого:

- Щелкните правой кнопкой мыши в любом месте на левой части вычисляемого интеграла.
- В появившемся контекстном меню выберите один из четырех численных алгоритмов (рис. 2).

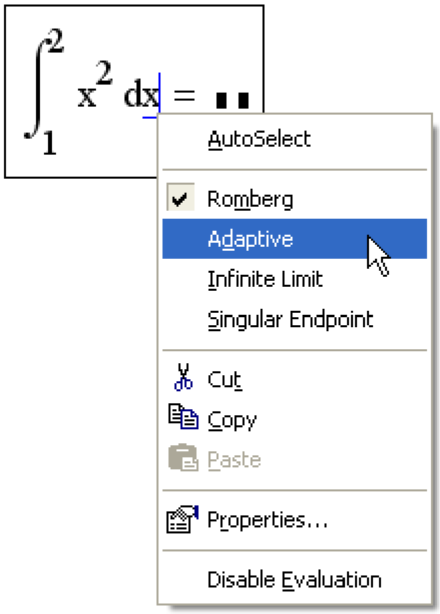

Рис. 2. Выбор алгоритма численного интегрирования

Обратите внимание, что, перед тем как один из алгоритмов выбран впервые, как показано на рис. 2, флажок проверки в контекстном меню установлен возле пункта **AutoSelect** (Автоматический выбор). Это означает, что алгоритм определяется Mathcad, исходя из анализа пределов интегрирования и особенностей подынтегральной функции. Как только один из алгоритмов выбран, этот флажок сбрасывается, а избранный алгоритм отмечается точкой.

Разработчиками Mathcad запрограммированы четыре численных метода интегрирования:

- **Romberg** (Ромберга) – дли большинства функций, не содержащих особенностей;
- **Adaptive** (Адаптивный) – для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования;
- **Infinite Limit** (Бесконечный предел) – для интегралов с бесконечными пределами ();
- **Singular Endpoint** (Сингулярная граница) – для интегралов с сингулярностью на конце. Модифицированный алгоритм Ромберга для функций, не определенных на одном или обоих концах интервала интегрирования.

Старайтесь все-таки оставить выбор численного метода за Mathcad, установив флажок **AutoSelect** (Автоматический выбор) в контекстном меню. Попробовать другой метод можно, например, чтобы сравнить результаты расчетов в специфических случаях, когда у Вас закрадываются сомнения в их правильности.

Если подынтегральная функция "хорошая", т. е. не меняется на интервале интегрирования слишком быстро и не обращается на нем в бесконечность, то численное решение интеграла не принесет никаких неприятных сюрпризов.

Приведем основные идеи итерационного алгоритма Ромберга, который применяется для большинства таких функций.

- Сначала строится несколько интерполирующих полиномов, которые заменяют на интервале интегрирования подынтегральную функцию f(x). В качестве первой итерации полиномы вычисляются по 1.2 и 4 интервалам. Например, первый полином, построенный по 1 интервалу, – это просто прямая линия, проведенная через две граничные точки интервала интегрирования, второй – квадратичная парабола и т. д.
- Интеграл от каждого полинома с известными коэффициентами легко вычисляется аналитически. Таким образом, определяется последовательность интегралов от интерполирующих полиномов: ilf i2, i4,… Например, по правилу трапеций i1=(b-a) (f (a)+f (b))/2 и т. д.
- Из-за интерполяции по разному числу точек вычисленные интегралы ii, i2,… несколько отличаются друг от друга. Причем, чем больше точек используется для интерполяции, тем интеграл от интерполяционного полинома ближе к искомому интегралу, стремясь к нему в пределе бесконечного числа точек. Поэтому определенным образом осуществляется экстраполяция последовательности ilf i2, i4,… до нулевой ширины элементарного интервала. Результат этой экстраполяции J принимается за приближение к вычисляемому интегралу.
- Осуществляется переход к новой итерации с помощью еще более частого разбиения интервала интегрирования, добавления нового члена последовательности интерполирующих полиномов и вычисления нового (N-го) приближения Ромберга JN.
- Чем больше количество точек интерполяции, тем ближе очередное приближение Ромберга к вычисляемому интегралу и, соответственно, тем меньше оно отличается от приближения предыдущей итерации. Как только разница между двумя последними итерациями | JN-j11"11 становится меньше погрешности TOL или меньше TOL-|JN|, итерации прерываются, и JN появляется на экране в качестве результата интегрирования.

О расходящихся интегралах

Если интеграл расходится (равен бесконечности), то вычислительный процессор Mathcad может выдать сообщение об ошибке, выделив при этом оператор интегрирования, как обычно, красным цветом. Чаще всего ошибка будет иметь тип "Found a number with a magnitude greater than 10^307" (Найдено число, превышающее значение 10^{307}) или "Can't converge to a solution" (Не сходится к решению), как, например, при попытке вычислить интеграл. Тем не менее, символьный процессор справляется с этим интегралом, совершенно правильно находя его бесконечное значение (листинг 5.4).

Листинг 5.4. Символьное вычисление расходящегося интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \rightarrow \infty$$

Символьный процессор предоставляет замечательные возможности аналитического вычисления интегралов, в том числе зависящих от параметров и неопределенных интегралов, как показано в листингах 5.5 и 5.6. Об этом и о вычислении интегралов с помощью меню **Symbolics** (Символика), упоминалось в гл. 5.

Листинг 5.5. Символьное вычисление интеграла с переменным пределом:

$$\int_0^{a} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \rightarrow 2 \cdot a^{\frac{1}{2}}$$

Листинг 5.6. Символьное вычисление неопределенного интеграла:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \rightarrow 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

При попытке численного решения задачи из листинга 5.4 методом, отличным от алгоритма вычисления интегралов с бесконечными пределами (**Infinite Limit**), будет получено неверное решение (листинг 5.7) – вместо бесконечности выдано большое, но конечное число, немного не дотягивающее до численной бесконечности, являющейся для вычислительного процессора просто большим числом 10^{307} . Отметим, что Mathcad в режиме автоматического выбора алгоритма (**AutoSelect**) предлагает именно алгоритм **Infinite Limit**.

Листинг 5.7. Плохо выбранный численный алгоритм неверно находит расходящийся интеграл:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 6.325 \times 10^{153}$$

Кратные интегралы

Для того чтобы вычислить кратный интеграл:

- Введите, как обычно, оператор интегрирования.
- В соответствующих местозаполнителях введите имя первой переменной интегрирования и пределы интегрирования по этой переменной.

- На месте ввода подынтегральной функции введите еще один оператор интегрирования.
- Точно так же введите вторую переменную, пределы интегрирования и подынтегральную функцию (если интеграл двукратный) или следующий оператор интегрирования (если более чем двукратный) и т. д., пока выражение с многократным интегралом не будет введено окончательно.

Пример символьного и численного расчета двукратного интеграла в бесконечных пределах приведен в листинге 5.8. Обратите внимание, что символьный процессор "угадывает" точное значение интеграла pi а вычислительный определяет его приближенно и выдает в виде числа 3.142.

Листинг 5.8. Символьное и численное вычисление кратного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy \rightarrow \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dx\,dy = 3.142$$

Аккуратнее вводите в редакторе Mathcad кратные интегралы, если они имеют различные пределы интегрирования по разным переменным. Не перепутайте пределы, относящиеся к разным переменным. Если Вы имеете дело с такого рода задачами, обязательно разберитесь с листингом 5.9, в котором символьный процессор вычисляет двукратный интеграл. В первой строке пределы интегрирования [a, b] относятся к переменной y, а во второй строке – к переменной X.

Листинг 5.9. Символьное вычисление кратных интегралов:

$$\int_{a}^{b}\int_{-1}^{1} x+y^3\,dx\,dy \rightarrow \frac{1}{2}\cdot b^4-\frac{1}{2}\cdot a^4$$

$$\int_{a}^{b}\int_{-1}^{1} x+y^3\,dy\,dx \rightarrow b^2-a^2$$