Тема №6 «Алгебраические уравнения и оптимизация»
Лекция 2 «Линейное программирование, символьное решение»

1. Линейное программирование

Задачи поиска условного экстремума функции многих переменных часто встречаются в экономических расчетах для минимизации издержек, финансовых рисков, максимизации прибыли и т. п. Целый класс экономических задач оптимизации описывается системами линейных уравнений и неравенств. Они называются задачами линейного программирования.

Приведем характерный пример т. н. транспортной задачи, которая решает одну из проблем оптимальной организации доставки товара потребителям с точки зрения экономии транспортных средств (листинг 1).

Листинг 1 Решение задачи линейного программирования:

$$a := \begin{pmatrix} 145 \\ 210 \\ 160 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 237 \\ 278 \end{pmatrix}$$

$$\sum a = 515 \qquad \sum b = 515$$

$$M := \text{rows}(a) \qquad N := \text{rows}(b)$$

$$M = 3 \qquad N = 2$$

$$c := \begin{pmatrix} 11.5 & 7 & 12 \\ 6.2 & 10 & 9.0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} c_{i,j} \cdot x_{i,j}$$

$$CTOL := 0.5$$

$$x_{N-1,M-1} := 0$$

Given

$$x_{0,0} + x_{1,0} = a_0 \qquad x_{0,0} \ge 0 \qquad x_{1,0} \ge 0$$

$$x_{0,1} + x_{1,1} = a_1 \qquad x_{0,1} \ge 0 \qquad x_{1,1} \ge 0$$

$$x_{0,2} + x_{1,2} = a_2 \qquad x_{0,2} \ge 0 \qquad x_{1,2} \ge 0$$

$$x_{0,0} + x_{0,1} + x_{0,2} = b_0$$

$$x_{1,0} + x_{1,1} + x_{1,2} = b_1$$

$$sol := \text{Minimize}(f, x)$$

Модель типичной транспортной задачи следующая. Пусть имеется *N* предприятий-производителей, выпустивших продукцию в количестве $b_0,\dots,b_{n-1}$, тонн. Эту продукцию требуется доставить М потребителям в количестве $a_0,\dots, a_{м-1}$ тонн каждому. Численное определение векторов а и b находится в первой строке листинга. Сумма всех заказов потребителей a_i равна сумме произведенной продукции, т. е. всех b_i (проверка равенства во второй строке). Если известна стоимость перевозки тонны продукции от 1-го производителя к *j*-му потребителю c_{ij} то решение задачи задает оптимальное распределение соответствующего товаропотока x_{ij} с точки зрения минимизации суммы транспортных расходов. Матрица *с* и минимизируемая функция *f (x)* матричного аргумента *x* находятся в середине листинга 1 .

Условия, выражающие неотрицательность товаропотока, и равенства, задающие сумму произведенной каждым предприятием продукции и сумму заказов каждого потребителя, находятся после ключевого слова **Given**. Решение, присвоенное матричной переменной *sol*, выведено в последней строке листинга вместе с соответствующей суммой затрат. Обратите внимание, что для получения результата пришлось увеличить погрешность **CTOL**, задающую максимальную допустимую невязку дополнительных условий. В строке, предшествующей ключевому слову **Given**, определяются нулевые начальные значения для х простым созданием нулевого элемента матрицы $x_{n-1,\, м-1}$.

Если взять другие начальные значения для *x*, решение, скорее всего, будет другим! Возможно, Вы сумеете отыскать другой локальный минимум, который еще больше минимизирует транспортные затраты. Это еще раз доказывает, что задачи на глобальный минимум, к классу которых относится линейное программирование, требуют аккуратного отношения в смысле выбора начальных значений. Часто ничего другого не остается, кроме сканирования всей области начальных значений, чтобы из множества локальных минимумов выбрать наиболее глубокий.

Символьное решение уравнений

Некоторые уравнения можно решить точно с помощью символьного процессора Mathcad. Делается это очень похоже на численное решение уравнений с применением вычислительного блока. Присваивать неизвестным начальные значения нет необходимости. Листинги 2 и 3 демонстрируют символьное решение уравнения с одним неизвестным и системы двух уравнений с двумя неизвестными соответственно.

Листинг 2. Символьное решение алгебраического уравнения с одним неизвестным:

Given

$$x^2 + 2\cdot x - 4 = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow \left(\sqrt{5} - 1 \quad -1 - \sqrt{5}\right)$$

Листинг 3 Символьное решение системы алгебраических уравнений:

Given

$$x^4 + y^2 - 3 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{-1}{4}\cdot\left(-2 + 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4}\cdot\left(-2 + 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{4}\cdot\left(-2 - 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4}\cdot\left(-2 - 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{8}\cdot\left(-2 + 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{8}\cdot\left(-2 + 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{8}\cdot\left(-2 - 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{8}\cdot\left(-2 - 2\cdot 193^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Как видно, вместо знака равенства после функции **Find** в листингах следует знак символьных вычислений, который можно ввести с панели **Symbolic** (Символика) или, нажав клавиши **CTRL +**.. Не забывайте, что сами уравнения должны иметь вид логических выражений, т. е. знаки равенства нужно вводить с помощью панели **Booleans** (Булевы операторы). Обратите внимание, что в листинге 3 вычислены как два первых действительных корня, которые мы уже находили численным методом, так и два других мнимых корня. Эти два последних корня чисто мнимые, т. к. множитель, входящий в них.

С помощью символьного процессора решить уравнение с одним неизвестным можно и по-другому:

Введите уравнение, пользуясь панелью **Booleans** (Булевы операторы) или нажав клавиши **CTRL +**, для получения логического знака равенства, например $x^2 + 2(x-4)=0$.

Щелчком мыши выберите переменную, относительно которой Вы собираетесь решить уравнение.

Выберите в меню **Symbolics** (Символика) пункт **Variable › Solve** (Переменная › Решить).

После строки с уравнением появится строка с решением или сообщение о невозможности символьного решения этого уравнения.

В данном примере после осуществления описанных действий появляется вектор, состоящий из двух корней уравнения.

Символьные вычисления могут производиться и над уравнениями, в которые, помимо неизвестных, входят различные параметры. В листинге 4 приведен пример решения уравнения четвертой степени с параметром а. Как видите, результат получен в аналитической форме.

Листинг 4 . Символьное решение уравнения, зависящего от параметра:

Given

$$x^4 - a^4 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x) \rightarrow (a \quad -a \quad i\cdot a \quad -i\cdot a)$$

3. Поиск экстремума функции. Экстремум функции одной переменной.

В качестве завершения темы №6 рассмотрим варианты программирования экстремума функции.

Задачи поиска экстремума функции означают нахождение ее максимума (наибольшего значения) или минимума (наименьшего значения) в некоторой области определения ее аргументов. Ограничения значений аргументов, задающих эту область, как и прочие дополнительные условия, должны быть определены в виде системы неравенств и (или) уравнений. В таком случае говорят о задаче на условный экстремум.

Для решения задач поиска максимума и минимума в Mathcad имеются встроенные функции Minerr, Minimize и Maximize. Все они используют те же градиентные численные методы, что и функция Find для решения уравнений. Поэтому Вы можете выбирать численный алгоритм минимизации из уже рассмотренных нами численных методов в лекции 6.1.

Экстремум функции одной переменной

Поиск экстремума функции включает в себя задачи нахождения локального и глобального экстремума. Последние называют еще задачами оптимизации. Рассмотрим конкретный пример функции *f(x)*, показанной графиком на рис. 1 на интервале (-2.5). Она имеет глобальный максимум на левой границе интервала, глобальный минимум, локальный максимум, локальный минимум и локальный максимум на правой границе интервала (в порядке слева направо).

В Mathcad с помощью встроенных функций решается только задача поиска локального экстремума. Чтобы найти глобальный максимум (или минимум), требуется либо сначала вычислить все их локальные значения и потом выбрать из них наибольший (наименьший), либо предварительно просканировать с некоторым шагом рассматриваемую область, чтобы выделить из нее подобласть наибольших (наименьших) значений функции и осуществить поиск глобального экстремума, уже находясь в его окрестности. Последний путь таит в себе некоторую опасность уйти в зону другого локального экстремума, но часто может быть предпочтительнее из соображений экономии времени.

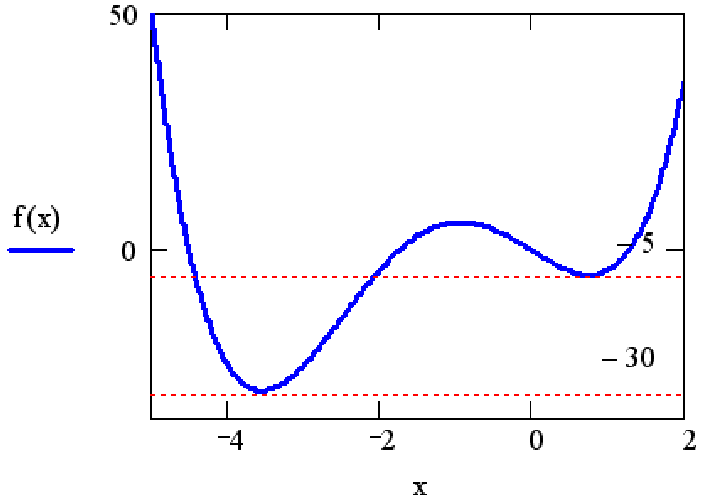

Рис. 1. График функции $f(x)=x^4+5x^3-10x$

Для поиска локальных экстремумов имеются две встроенные функции, которые могут применяться как в пределах вычислительного блока, так и автономно.

- Minimize *(f, $x_1,\dots,x_M$)* – вектор значений аргументов, при которых функция *f* достигает минимума;
- Maximize (*f,* $x_1,\dots,x_M$) – вектор значений аргументов, при которых функция *f* достигает максимума;
  - *f* ($x_1,\dots,x_M,\dots$) – функция;
  - $x_1,\dots,x_M$ – аргументы, по которым производится минимизация (максимизация).

Всем аргументам функции *f* предварительно следует присвоить некоторые значения, причем для тех переменных, по которым производится минимизация, они будут восприниматься как начальные приближения. Примеры вычисления экстремума функции одной переменной (рис. 1) без дополнительных условий показаны в листингах 5 - 6 . Поскольку никаких дополнительных условий в них не вводится, поиск экстремумов выполняется для любых значений.

Листинг 5 . Минимум функции одной переменной:

$$f(x) := x^4 + 5\cdot x^3 - 10\cdot x$$

$$x := -1$$

$$\mathrm{Minimize}(f, x) = -3.552$$

$$x := 1$$

$$\mathrm{Minimize}(f, x) = 0.746$$

Листинг 6 Максимум функции одной переменной:

$$f(x) := x^4 + 5\cdot x^3 - 10\cdot x$$

$$x := 1$$

$$\mathrm{Maximize}(f, x) = -0.944$$

$$x := -10$$

$$\mathrm{Maximize}(f, x) = \blacksquare$$

Как видно из листингов, существенное влияние на результат оказывает выбор начального приближения, в зависимости от чего в качестве ответа выдаются различные локальные экстремумы. В последнем случае численный метод вообще не справляется с задачей, поскольку начальное приближение

x =-10 выбрано далеко от области локального максимума, и поиск решения уходит в сторону увеличения *f (x)*.