Тема №5 Интегрирование и дифференцирование

Лекция 2 Дифференцирование

2.1 Дифференцирование. Первая производная.

С помощью Mathcad можно вычислять производные скалярных функций любого количества аргументов, от 0-го до 5-го порядка включительно. И функции, и аргументы могут быть как действительными, так и комплексными. Невозможно дифференцирование функций только вблизи точек их сингулярности.

Вычислительный процессор Mathcad обеспечивает превосходную точность численного дифференцирования. Но больше всего пользователь оценит возможности символьного процессора, который позволяет с легкостью осуществить рутинную работу вычисления производных громоздких функций, поскольку, в отличие от всех других операций, символьное дифференцирование выполняется успешно для подавляющего большинства аналитически заданных функций.

В Mathcad для ускорения и повышения точности численного дифференцирования функций, заданных аналитически, автоматически задействуется символьный процессор (см. "Оптимизация вычислений").

Первая производная

Для того чтобы продифференцировать функцию f (x) в некоторой точке:

- Определите точку x, в которой будет вычислена производная, например x: = 1.
- Введите оператор дифференцирования нажатием кнопки **Derivative** (Производная) на панели **Calculus** (Вычисления) или введите с клавиатуры вопросительный знак **?**.
- В появившихся местозаполнителях (рис. 1) введите функцию, зависящую от аргумента x, т. е .f(x), и имя самого аргумента x.
- Введите оператор = численного или › символьного вывода для получения ответа.

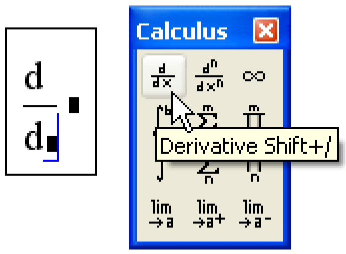


Рис. 1. Оператор дифференцирования

Пример дифференцирования функции f(x)=cos(x)ln(x) приведен в листинге 1.

Листинг 1. Численное и символьное дифференцирование:

$$x := 0.01$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x)\cdot\ln(x) = 100.041$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x)\cdot\ln(x) \to -\sin\left(1.\cdot 10^{-2}\right)\cdot\ln\left(1.\cdot 10^{-2}\right) + 1.\cdot 10^{2}\cdot\cos\left(1.\cdot 10^{-2}\right)$$

Не забывайте предварительно определять точку, в которой производится численное дифференцирование, как это сделано в первой строке листинга 1. Иначе будет выдано сообщение об ошибке, показанное на рис. 2, гласящее, что переменная или функция, входящая в выражение, ранее не определена. Между тем, символьное дифференцирование не требует обязательного явного задания точки дифференцирования. В этом случае вместо значения производной (числа или числового выражения) будет выдана аналитическая зависимость (см. верхнюю часть рис. 2).

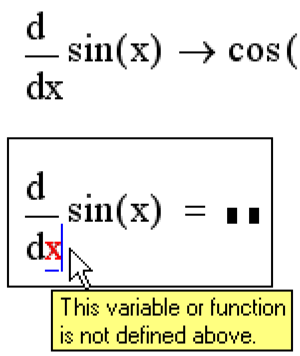


Рис. 2. Ошибка в применении оператора дифференцирования

Конечно, можно, как и при использовании других операторов, предварительно определить функцию в отдельном выражении, а затем посчитать ее производную (см. листинг 2); или применить оператор дифференцирования для определения собственных функций пользователя (см. листинг 3).

Листинг 2. Символьное и численное дифференцирование функции пользователя:

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \to \frac{-1}{x^2}$$

$$x := 0.1$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = -100$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \to -1.\cdot 10^{2}$$

Листинг 3. Определение функции через оператора дифференцирования:

$$f(x) := \frac{1}{x}$$

$$g(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$$g(0.1) = -100$$

$$g(0.1) \rightarrow -1.\cdot 10^2$$

В обоих листингах первой строкой определяется функция f (x)=1/x. Во второй строке листинга 2 с помощью символьного процессора находится аналитическое выражение ее производной, а в оставшейся части, подобно листингу 1, сначала численно, а затем аналитически определяются значения этой производной в точке x=0.1. В листинге 3 через производную от f (x) определяется еще одна пользовательская функция д(x) и затем находится ее конкретное значение в той же точке x=0.1.

Как Вы заметили, оператор дифференцирования, в основном, соответствует его общепринятому математическому обозначению. Однако в некоторых случаях при его вводе следует проявить осторожность. Рассмотрим один показательный пример, приведенный в листинге 4. Его первые две строки вычисляют производную sin(x) в точке x=0.5. Последняя строка демонстрирует неправильное применение оператора дифференцирования. Вместо вычисления производной sin(x) в той же точке, как этого можно было ожидать, получено нулевое значение. Это случилось потому, что аргумент функции sin(x) введен не в виде переменной x, а в виде числа. Поэтому Mathcad воспринимает последнюю строку как вычисление сначала значения синуса в точке x=0.5, а затем дифференцирование этого значения (т. е. константы) также в точке x=0.5, в соответствии с требованием первой строки листинга. Поэтому ответ, на самом деле, неудивителен – в какой точке ни дифференцируй константу, результатом будет ноль.

Листинг 4. Пример правильного и неправильного применения дифференцирования:

$$x := 0.5$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = 0.878$$

$$\frac{d}{dx}\sin(0.5) = 0$$

Для численного дифференцирования Mathcad применяет довольно сложный алгоритм, вычисляющий производную с колоссальной точностью до 7-8-го знака после запятой. Этот алгоритм (метод Риддера) описан во встроенной справочной системе Mathcad, доступной через меню **Help** (Справка). Погрешность дифференцирования не зависит от констант **TOL** или **CTOL**, в противоположность большинству остальных численных методов, а определяется непосредственно алгоритмом.

Исключение составляют функции, которые дифференцируются в окрестности сингулярной точки; например для рассмотренной нами функции f (x)=1/x это будут точки вблизи x=0. При попытке найти ее производную при x=0 будет выдано сообщение об одной из ошибок деления на ноль "Can't divide by zero" (Деление на ноль невозможно) или "Found a singularity while evaluating this expression. You may be dividing by zero" (Найдена сингулярность при вычислении этого выражения. Возможно, Вы делите на ноль). Если попробовать численно определить производную очень близко к нулю, например, при $x=10^{-100}$, то может появиться сообщение об ошибке "Can't converge to a solution" (Невозможно найти решение). Встретившись с одной из упомянутых ошибок, присмотритесь повнимательнее к дифференцируемой функции и убедитесь, что Вы не имеете дело с точкой сингулярности.

2.2 Производные высших порядков

Mathcad позволяет численно определять производные высших порядков, от 0-го до 5-го включительно. Чтобы вычислить производную функции f (x) N-го порядка в точке x, нужно проделать те же самые действия, что и при взятии первой производной (см. разд. 7.2.1), за тем исключением, что вместо оператора производной необходимо применить оператор N-й производной (**Nth Derivative**). Этот оператор вводится с той же панели **Calculus** (Вычисления) либо с клавиатуры нажатием клавиш **CTRL +?** и содержит еще два местозаполнителя, в которые следует поместить число N. В полном соответствии с математическим смыслом оператора, определение порядка производной в одном из местозаполнителей приводит к автоматическому появлению того же числа в другом из них.

"Производная" при N=0 по определению равна самой функции, при N=1 получается обычная первая производная. Листинг 5 демонстрирует численное и символьное вычисление второй производной. Обратите внимание, что, как и при вычислении обычной производной, необходимо перед оператором дифференцирования присвоить аргументу функции значение, для которого будет вычисляться производная.

Листинг 5. Численное и символьное вычисление второй производной:

$$x := 0.1$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\cos(x)\cdot x^2 = 1.94$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\cos(x)\cdot x^2 \rightarrow 1.99\cdot\cos(.1) - .4\cdot\sin(.1)$$

Убедиться в том, что символьный процессор Mathcad в последней строке листинга 5 дает тот же результат, что и вычислительный процессор в предыдущей строке, можно, упростив его. Для этого следует выделить полученное последнее выражение и выбрать в меню **Symbolics** (Символика) пункт **Symplify** (Упростить). После этого ниже появится еще одна строка с численным результатом выделенного выражения.

Чтобы вычислить производную порядка выше 5-го, следует последовательно применить несколько раз оператор N-й производной, подобно тому как вводились операторы кратного интегрирования. Однако для символьных вычислений этого не потребуется – символьный процессор умеет считать производные порядка выше 5-го. Сказанное иллюстрирует листинг 6, в котором сначала численно, а затем символьно вычисляется седьмая производная синуса в точке x=0.1.

Листинг 6. Численное и символьное вычисление седьмой производной:

$$x := 0.1$$

$$\frac{d^5}{dx^5}\frac{d^2}{dx^2}\sin(x) = -0.995$$

$$\frac{d^7}{dx^7}\sin(x) \rightarrow -\cos(.1)$$

Расчет производных высших порядков производится тем же вычислительным методом Риддера, что и расчет первых производных. Причем для первой производной этот метод обеспечивает точность до 7-8 значащих разрядов числа, а при повышении порядка производной на каждую единицу точность падает примерно на один разряд.

Из сказанного ясно, что падение точности при численном расчете высших производных может быть очень существенно. В частности, если попытаться определить девятую производную синуса, подобно идее листинга 6, то в качестве результата будет выдан нуль, в то время как истинное значение девятой производной равно cos (0.1).

2.3 Частные производные

С помощью обоих процессоров Mathcad можно вычислять производные функций любого количества аргументов. В этом случае, как известно, производные по разным аргументам называются частными. Чтобы вычислить частную производную, необходимо, как обычно, ввести оператор производной с панели **Calculus** (Вычисления) и в соответствующем местозаполнителе напечатать имя переменной, по которой должно быть осуществлено дифференцирование.

Пример приведен в листинге 7, в первой строке которого определена функция двух переменных, а в двух следующих строках символьным образом вычислены ее частные производные по обеим переменным – x и y – соответственно. Чтобы определить частную производную численным методом, необходимо предварительно задать значения всех аргументов, что и сделано в следующих двух строках листинга. Последнее выражение в листинге снова (как и в третьей строке) определяет символьно частную производную по y. Но поскольку переменным x и y уже присвоено конкретное значение, то в результате получается число, а не аналитическое выражение.

Листинг 7. Символьное и численное вычисление частных производных:

$$f(x,y) := x^{2\cdot y} + \cos(x)\cdot y$$

$$\frac{d}{dx}f(x,y) \to 2\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y}{x} - \sin(x)\cdot y$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) \to 2\cdot x^{2\cdot y}\cdot\ln(x) + \cos(x)$$

$$x := 1 \qquad y := 0.1$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) = 0.54$$

$$\frac{d}{dy}f(x,y) \to \cos(1)$$

Частные производные высших порядков рассчитываются точно так же, как и обычные производные высших порядков. Листинг 8 иллюстрирует расчет вторых производных функции из предыдущего примера по переменным x, y и смешанной производной.

Листинг 8. Вычисление второй частной производной:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{2\cdot y} + \cos(x)\cdot y\right) \rightarrow 4\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y^2}{x^2} - 2\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y}{x^2} - \cos(x)\cdot y$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(x^{2\cdot y} + \cos(x)\cdot y\right) \rightarrow 4\cdot x^{2\cdot y}\cdot \ln(x)^2$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\left(x^{2\cdot y} + \cos(x)\cdot y\right) \rightarrow 4\cdot x^{2\cdot y}\cdot\frac{y}{x}\cdot\ln(x) + 2\cdot\frac{x^{2\cdot y}}{x} - \sin(x)$$

Возможно, Вы обратили внимание, что в обоих листингах 7 и 8 оператор дифференцирования записан в форме частной производной. Подобно тому как существует возможность выбирать вид, например оператора присваивания, можно записывать операторы дифференцирования в виде обычной или частной производной. Запись оператора не влияет на вычисления, а служит лишь более привычной формой представления расчетов.

Для того чтобы изменить вид оператора дифференцирования на представление частной производной, следует:

- Вызвать контекстное меню из области оператора дифференцирования нажатием правой кнопки мыши.
- Выбрать в контекстном меню верхний пункт **View Derivative As** (Показывать производную как).
- В появившемся подменю (рис. 3) выбрать пункт **Partial Derivative** (Частная производная).

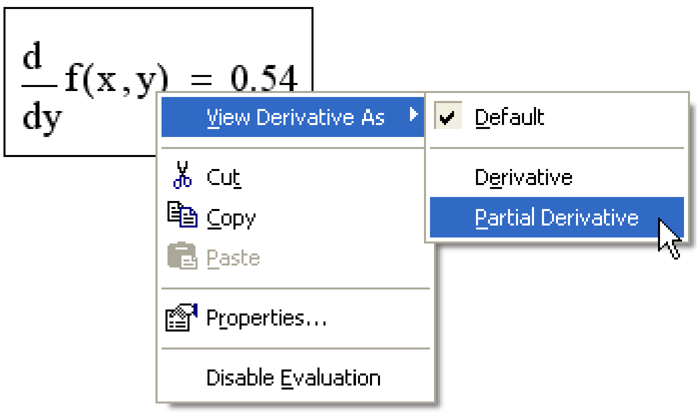
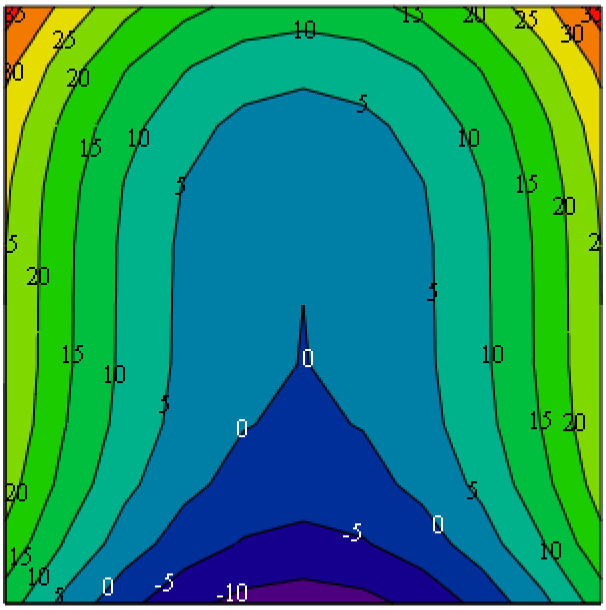


Рис. 3. Изменение вида оператора дифференцирования

Чтобы вернуть вид производной, принятый по умолчанию, выберите в подменю пункт **Default** (По умолчанию) либо, для представления ее в обычном виде – **Derivative** (Производная).

Завершим разговор о частных производных двумя примерами, которые нередко встречаются в вычислительной практике. Программная реализация первого из них, посвященная вычислению градиента функции двух переменных, приведена в листинге 9. В качестве примера взята функция f (x,y), определяемая в первой строке листинга, график которой показан в виде линий уровня на рис. 4.



F

Рис. 4. График линий уровня функции f (x,y) (листинг 7.9)

Как известно, градиент функции f(x,y) является векторной функцией тех же аргументов, что и f (x,y), определенной через ее частные производные, согласно второй строке листинга 9. В оставшейся части этого листинга задаются ранжированные переменные и матрицы, необходимые для подготовки графиков функции и ее градиента.

Листинг 9. Вычисление градиента:

$$f(x,y) := x^2 + 0.1\cdot y^3$$

$$grad(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$N := 5$$

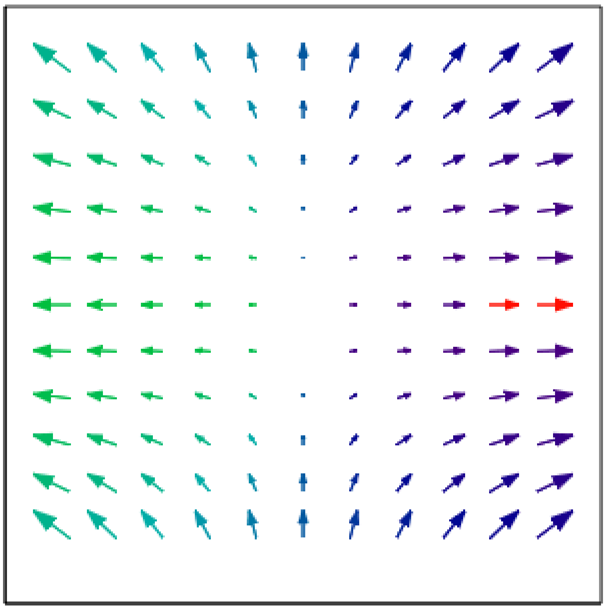
$$i := 0..2\cdot N \qquad j := 0..2\cdot N$$

$$F_{i,j} := f(i-N, j-N)$$

$$V_{i,j} := grad(i-N, j-N)$$

$$X_{i,j} := (V_{i,j})_0 \qquad Y_{i,j} := (V_{i,j})_1$$

Векторное поле рассчитанного градиента функции f(x,y) показано на рис. 5. Как можно убедиться, сравнив рис. 4 и 5, математический смысл градиента состоит в задании в каждой точке (x,y) направления на плоскости, в котором функция f (x,y) растет наиболее быстро.



(X,Y)

Рис. 5 Векторное поле градиента функции f (x,y) (листинг 9)

Таким образом рассмотрены скалярные функции, к которым, собственно, и можно применять операторы дифференцирования.